Formules de Thomae généralisées aux courbes résolubles sur $\mathbb{P}^1$

A. Le Meur, D. Lubicz

Université de Rennes 1

Luminy, 18 Janvier 2017

Fonction thêta de Riemann

Définition

Pour $(z, \Omega) \in (\mathbb{C}^g, \mathcal{H}^g)$, on définit la fonction thêta de Riemann

$$\theta(z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi({}^t n\Omega n + 2{}^t nz))$$

Fonction thêta de Riemann

Définition

Pour $(z, \Omega) \in (\mathbb{C}^g, \mathcal{H}^g)$, on définit la fonction thêta de Riemann

$$\theta(z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi({}^t n\Omega n + 2{}^t nz))$$

Propriétés

- $\forall m \in \mathbb{Z}^g, \quad \theta(z + m, \Omega) = \theta(z, \Omega)$
- $\forall m \in \mathbb{Z}^g, \quad \theta(z + \Omega m, \Omega) = \exp(-i\pi({}^t m\Omega m + 2{}^t mz))\theta(z, \Omega)$
- $\theta(-z, \Omega) = \theta(z, \Omega)$

On dit que la fonction θ est quasi-périodique par rapport au réseau $\Lambda = \mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$ de $\mathbb{C}^g$.

Fonctions thêta avec caractéristiques

Définition

Pour a et b dans $\mathbb{R}^g$ et $(z,\Omega) \in (\mathbb{C}^g, \mathcal{H}^g)$, on définit la fonction thêta avec caractéristiques

$$\theta \left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right] (z,\Omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^g} \exp(i\pi({}^t(n+a)\Omega(n+a) + 2\,{}^t(n+a)(z+b)))$$

Fonctions thêta avec caractéristiques

Définition

Pour a et b dans $\mathbb{R}^g$ et $(z, \Omega) \in (\mathbb{C}^g, \mathcal{H}^g)$, on définit la fonction thêta avec caractéristiques

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi({}^t(n+a)\Omega(n+a) + 2{}^t(n+a)(z+b)))$$

Propriétés

1. $\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \Omega) = \exp(i\pi({}^t a\Omega a + 2{}^t a(z+b)))\theta(z + \Omega a + b, \Omega)$
2. $\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z + \Omega m + n, \Omega) =$
$\exp(-i\pi({}^t m\Omega m + 2{}^t mz)) \exp(2i\pi({}^t an -{}^t bm))\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z, \Omega)$

Motivation

Calcul effectif

Les fonctions thêta permettent de plonger le tore $\mathbb{C}^g/\Lambda$ dans un espace projectif. On sait calculer l'addition de points, des isogénies, etc. Mais on a besoin des thêta constantes $(\theta_1(0), \ldots, \theta_k(0))$...

Motivation

Calcul effectif

Les fonctions thêta permettent de plonger le tore $\mathbb{C}^g/\Lambda$ dans un espace projectif. On sait calculer l'addition de points, des isogénies, etc. Mais on a besoin des thêta constantes $(\theta_1(0), \ldots, \theta_k(0))$...

Problème de modularité

Les fonctions thêta servent de coordonnées de l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées. En particulier, elles peuvent être un outil pratique pour distinguer les variétés jacobiennes des variétés abéliennes (problème de Schottky)

Jacobienne de courbes algébriques

Application d'Abel-Jacobi

Soit C une courbe projective lisse de genre g et $P_0 \in C$. Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base de $\Omega^1(C, \mathbb{C})$.
On a une application $\varphi_{P_0} : C \longrightarrow \mathbb{C}^g / H_1(C, \mathbb{Z})$ définie par

$$\varphi_{P_0} : P \mapsto \left(\int_{P_0}^{P} \omega_1, \cdots, \int_{P_0}^{P} \omega_g\right)$$

Le tore ainsi défini est une variété abélienne, appelée variété jacobienne associée à la courbe C.

Jacobienne de courbes algébriques

Application d'Abel-Jacobi

Soit C une courbe projective lisse de genre g et $P_0 \in C$. Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base de $\Omega^1(C, \mathbb{C})$.
On a une application $\varphi_{P_0} : C \longrightarrow \mathbb{C}^g / H_1(C, \mathbb{Z})$ définie par

$$\varphi_{P_0} : P \mapsto (\int_{P_0}^{P} \omega_1, \cdots, \int_{P_0}^{P} \omega_g)$$

Le tore ainsi défini est une variété abélienne, appelée variété jacobienne associée à la courbe C.

On prendra $\Lambda = H_1(C, \mathbb{Z})$.

Comment calculer les thêta constantes $\theta_i(0)$?

Formules de Thomae classiques

Si C est une courbe hyperelliptique, les formules de Thomae donnent un lien entre la courbe et les thêta constantes à la puissance 4 :

$$\frac{\theta^4 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(0)}{\theta^4 \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}(0)} = F(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$$

où F est une fraction rationnelle et C la courbe d'équation affine

$$y^2 = \prod_{i=1}^{d}(x - \lambda_i)$$

Table of contents

État de l'art

- 1870 : Carl Johannes Thomae montre les formules pour les courbes hyperelliptiques. [8]
- 1988 : Bershadsky et Radul généralisent ces formules au cas des courbes Z_N non singulières. [1]
- 1996 : Nakayashiki donne une preuve "rigoureuse" des formules de l'article de Bershadsky et Radul. [7]
- 2011 : Zemel et Farkas donnent une preuve algébrique des formules précédemment établies. [3], [4]
- 2011 : Gonzalez-Diez et Torres-Teigell montre qu'il n'existe pas toujours de formules dans le cas général. [5]
- 2013 : Zemel généralise les formules au cas des courbes Z_N totalement ramifiées. [9]

Quelques définitions

- Soit C une courbe projective lisse. Un diviseur D est une somme formelle finie de points de C.

$$D = \sum_{P \in C} m_P P.$$

D est dit *effectif* si tous ses coefficients sont positifs.

Quelques définitions

- Soit C une courbe projective lisse. Un diviseur D est une somme formelle finie de points de C.

$$D = \sum_{P \in C} m_P P.$$

  D est dit *effectif* si tous ses coefficients sont positifs.
- On note $\ell(D)$ le nombre fonctions de C linéairement indépendantes et dont les pôles sont majorés par D.

Quelques définitions

- Soit C une courbe projective lisse. Un diviseur D est une somme formelle finie de points de C.

  $$D = \sum_{P \in C} m_P P.$$

  D est dit *effectif* si tous ses coefficients sont positifs.
- On note $\ell(D)$ le nombre fonctions de C linéairement indépendantes et dont les pôles sont majorés par D.
- ex : Soit $C : y^2 = x(x-1)(x-2)$. Alors $\ell(P_\infty) = 1$ (les fonctions constantes) et $\ell(2P_\infty) = 2$ (on rajoute la fonction x).

Principes de la construction

Théorème de Riemann

Soit D un diviseur effectif de degré g sur C et $z = \varphi_{P_0}(D) + \kappa_{P_0}$.

$$f : P \mapsto \theta(\varphi_{P_0}(P) - z)$$

Si $\ell(D) > 1$, alors f est identiquement nulle, sinon f a g zéros comptés avec multiplicités correspondants au diviseur D.

Principes de la construction

Théorème de Riemann

Soit D un diviseur effectif de degré g sur C et $z = \varphi_{P_0}(D) + \kappa_{P_0}$.

$$f : P \mapsto \theta(\varphi_{P_0}(P) - z)$$

Si $\ell(D) > 1$, alors f est identiquement nulle, sinon f a g zéros comptés avec multiplicités correspondants au diviseur D.

Proposition

Soit D_1 et D_2 deux diviseurs effectifs de degré g tels que $\ell(D_1) = \ell(D_2) = 1$, $\varphi(D_1) \in J[n]$ et $\varphi(D_2) \in J[n]$. Alors l'application

$$f : P \mapsto \frac{\theta^{2n}(\varphi_{P_0}(P) - z_1)}{\theta^{2n}(\varphi_{P_0}(P) - z_2)}$$

définit une fonction méromorphe sur C de diviseur $2nD_1 - 2nD_2$.

Table of contents

Diviseurs à support dans les points de ramification

Proposition

Soit C une courbe projective lisse telle que $Gal(C/\mathbb{P}^1)$ est cyclique d'ordre n et J la jacobienne associée à C. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des diviseurs à support dans les points de ramification. Alors

$$\varphi(\mathcal{R}) \subset J[n]$$

- A-t-on une condition pour vérifier quels sont les éléments non spéciaux de $\mathcal{R}$?

Diviseurs à support dans les points de ramification

Proposition

Soit C une courbe projective lisse telle que $Gal(C/\mathbb{P}^1)$ est cyclique d'ordre n et J la jacobienne associée à C. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des diviseurs à support dans les points de ramification. Alors

$$\varphi(\mathcal{R}) \subset J[n]$$

- A-t-on une condition pour vérifier quels sont les éléments non spéciaux de $\mathcal{R}$?
- Réponse : oui, on connait explicitement une base des formes différentielles holomorphes.

Base des formes différentielles holomorphes

Proposition

Soit C telle que $Gal(C/\mathbb{P}^1)$ est cyclique d'ordre n. Un élément primitif donne une équation affine de C

$$y^n = f(x) = \prod_i^d (x - \lambda_i)$$

Dans ce cas, une base de $\Omega^1(C, \mathbb{C})$ est $\omega_k = \frac{x^\nu y^k}{\prod_{i \in I}(x-\lambda_i)} dx$ pour $1 \leq k \leq n-1$ et $0 \leq \nu \leq t_k - 2$.

Formes différentielles et critère de non spécialité

Proposition

Si $D \in \mathcal{R}$, on a

$$\Omega^1(D) = \bigoplus_k \Omega^1_k(D)$$

où Ω^1_k est l'espace engendré par les formes de type ω_k.

Formes différentielles et critère de non spécialité

Proposition

Si $D \in \mathcal{R}$, on a

$$\Omega^1(D) = \bigoplus_k \Omega^1_k(D)$$

où Ω^1_k est l'espace engendré par les formes de type ω_k.

Proposition (critère de non spécialité)

D est non spécial si et seulement si $\Omega^1_k(D) = \{0\}$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$.

critère de non spécialité

critère de non spécialité

Soit $D \in \mathcal{R}$ tel que

$$D = \sum_{\mathcal{P}} m_{\mathcal{P}} \mathcal{P}$$

Alors D est non spécial si et seulement si pour tout k

$$Card \left\{ \mathcal{P} : m_{\mathcal{P}} > val_{\mathcal{P}} \left(\frac{y^k}{\prod_{i \in I}(x - \lambda_i)} dx \right) \right\} \geq t_k - 1$$

Table of contents

Problématique

Soit $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une courbe galoisienne.

- $\varphi_{P_0}(D)$ n'est plus (en général) un point de n-torsion de J.
- $\varphi_{P_0}(P_i)$ n'est plus (en général) un point de n-torsion si P_i est un point de ramification.

Problématique

Soit $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une courbe galoisienne.

- $\varphi_{P_0}(D)$ n'est plus (en général) un point de n-torsion de J.
- $\varphi_{P_0}(P_i)$ n'est plus (en général) un point de n-torsion si P_i est un point de ramification.

$\rightsquigarrow$ On va moyenner φ par un sous-groupe G d'ordre m de $Gal(C/\mathbb{P}^1)$.
Soit $T : J \longrightarrow J$ tel que

$$\forall P \in, \quad T\left(\int_{P_0}^{P} \omega\right) = \frac{1}{m} \sum_{\sigma \in G} \int_{\sigma(P_0)}^{\sigma(P)} \omega.$$

L'image de T est une sous-variété abélienne de J de dimension r.

Théorème de Riemann généralisé

Soit $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une courbe galoisienne de genre g et $P_0 \in C$. Alors il existe une constante $\tilde{\kappa}_{P_0} \in \mathbb{C}$ et un diviseur D_0, stable par G tels que l'application $f : C \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f : P \mapsto \theta(T(z) + T(\varphi_{P_0}(P)))$$

est identiquement nulle sur C ou bien a un diviseur des zéros D de degré r, stable par G et tel que

$$\varphi(D - D_0) = T(z) + \tilde{\kappa}_{P_0}$$

Corollaire

Soit D et D_0 des diviseurs effectifs stables par G, de degré r et $z = \varphi(D - D_0)$. Alors l'application

$$f : P \mapsto \theta(T(z) + T(\int_{P_0}^{P} \omega))$$

est identiquement nulle si et seulement si $\ell(D) > 1$.

Table of contents

Données du problème

- Soit C une courbe projective lisse telle que $Gal(C/\mathbb{P}^1)$ est résoluble d'ordre n.

Données du problème

- Soit C une courbe projective lisse telle que $Gal(C/\mathbb{P}^1)$ est résoluble d'ordre n.
- Soit $K_N = k(C)$ et $K_0 = k(\mathbb{P}^1)$. On a une tour d'extensions de corps

$$K_N/K_{N-1}/\cdots/K_0$$

avec K_i/K_{i-1} cyclique d'ordre premier p_i.

Données du problème

- Soit C une courbe projective lisse telle que $Gal(C/\mathbb{P}^1)$ est résoluble d'ordre n.
- Soit $K_N = k(C)$ et $K_0 = k(\mathbb{P}^1)$. On a une tour d'extensions de corps

$$K_N/K_{N-1}/\cdots/K_0$$

  avec K_i/K_{i-1} cyclique d'ordre premier p_i.
- On note y_i un élément primitif de K_i/K_{i-1}, i.e. $y_i \in K_i$ et $y_i^{p_i} \in K_{i-1}$ et x tel que $K_0 = k(x)$.

Table of contents

Base des formes holomorphes

- Peut-on généraliser la construction de la base pour les courbes cycliques?

Base des formes holomorphes

- Peut-on généraliser la construction de la base pour les courbes cycliques?
- Oui : Marques-Ward ([2] ou une adaptation de Boseck [6]).

Proposition

Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ *et* $y = y_1^{\mu_1} \cdots y_N^{\mu_N}$. *Alors une base de* $\Omega^1(C, \mathbb{C})$ *est*

$$\{x^\nu [g_\mu(x)]^{-1} y^\mu dx \mid 0 \leq \nu \leq t_\mu - 2, t_\mu \geq 2, \mu \in \Gamma\}$$

Base des formes holomorphes

- Peut-on généraliser la construction de la base pour les courbes cycliques?
- Oui : Marques-Ward ([2] ou une adaptation de Boseck [6]).

Proposition

Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$ *et* $y = y_1^{\mu_1} \cdots y_N^{\mu_N}$. *Alors une base de* $\Omega^1(C, \mathbb{C})$ *est*

$$\{x^\nu [g_\mu(x)]^{-1} y^\mu dx \mid 0 \leq \nu \leq t_\mu - 2, t_\mu \geq 2, \mu \in \Gamma\}$$

Question

A-t-on toujours une décomposition de $\Omega^1(D)$ en somme directe d'espaces dépendants de μ?

Hypothèse de Riemann

Proposition

Soit D un diviseur à support dans les points de ramification de C et stable par G, alors

$$\Omega^1(D) = \bigoplus_{\mu} \Omega^1_{\mu}(D)$$

Hypothèse de Riemann

Proposition

Soit D un diviseur à support dans les points de ramification de C et stable par G, alors

$$\Omega^1(D) = \bigoplus_{\mu} \Omega^1_\mu(D)$$

Critère

On a $i(D) = \sum_\mu \dim \Omega^1_\mu(D)$. On veut $\ell(D) = 1$, c'est-à-dire $i(D) = g - r$.

- On sait décrire des points de n-torsion de J à l'aide de diviseurs stables par un sous-groupe de $Gal(C/\mathbb{P}^1)$.

- On sait décrire des points de n-torsion de J à l'aide de diviseurs stables par un sous-groupe de $Gal(C/\mathbb{P}^1)$.
- Parmi ces points, on choisit ceux décrits par un diviseur D vérifiant $\ell(D) = 1$.

- On sait décrire des points de n-torsion de J à l'aide de diviseurs stables par un sous-groupe de $Gal(C/\mathbb{P}^1)$.
- Parmi ces points, on choisit ceux décrits par un diviseur D vérifiant $\ell(D) = 1$.
- On translate la fonction $\theta \circ T$ par un de ces points.

- On sait décrire des points de n-torsion de J à l'aide de diviseurs stables par un sous-groupe de $Gal(C/\mathbb{P}^1)$.
- Parmi ces points, on choisit ceux décrits par un diviseur D vérifiant $\ell(D) = 1$.
- On translate la fonction $\theta \circ T$ par un de ces points.
- Notre généralisation du théorème de Riemann permet de connaître le diviseur des zéros de la fonction précédente : c'est D.

- On sait décrire des points de n-torsion de J à l'aide de diviseurs stables par un sous-groupe de $Gal(C/\mathbb{P}^1)$.
- Parmi ces points, on choisit ceux décrits par un diviseur D vérifiant $\ell(D) = 1$.
- On translate la fonction $\theta \circ T$ par un de ces points.
- Notre généralisation du théorème de Riemann permet de connaître le diviseur des zéros de la fonction précédente : c'est D.
- On forme, comme dans le cas cyclique, des fractions de type $\psi(P) = \frac{\theta[D_1]^{2n}(T \circ \varphi_{P_0}(P))}{\theta[D_1]^{2n}(T \circ \varphi_{P_0}(P))}$ où D_1 et D_2 sont des diviseurs vérifiant les hypothèses précédentes.

- On sait décrire des points de n-torsion de J à l'aide de diviseurs stables par un sous-groupe de $Gal(C/\mathbb{P}^1)$.
- Parmi ces points, on choisit ceux décrits par un diviseur D vérifiant $\ell(D) = 1$.
- On translate la fonction $\theta \circ T$ par un de ces points.
- Notre généralisation du théorème de Riemann permet de connaître le diviseur des zéros de la fonction précédente : c'est D.
- On forme, comme dans le cas cyclique, des fractions de type $\psi(P) = \frac{\theta[D_1]^{2n}(T \circ \varphi_{P_0}(P))}{\theta[D_1]^{2n}(T \circ \varphi_{P_0}(P))}$ où D_1 et D_2 sont des diviseurs vérifiant les hypothèses précédentes.
- On évalue cette fonction en un point de ramification P_i et on fait de même pour la fraction rationnelle en x correspondant à ψ.

M Bershadsky and A Radul.
Fermionic fields on n-curves.
Communications in mathematical physics, 116(4):689–700, 1988.

H. Boseck.
Zur Theorie der Weierstraßpunkte.
Mathematische Nachrichten. Akademie-Verlag, 1958.

HM Farkas, JY Kaminski, and E Yakubov.
A nonsingular z3 curve of genus 4.
Ramanujan 125, 627:69, 2014.

H.M. Farkas and S. Zemel.
Generalizations of Thomae's Formula for Zn Curves.
Developments in Mathematics. Springer New York, 2010.

Gabino Gonzalez-Diez and David Torres-Teigell.
Zn-curves possessing no thomae formulae of bershadsky–radul.
Letters in Mathematical Physics, 98(2):193–205, 2011.

S. Marques and K. Ward.
Holomorphic differentials of solvable Galois towers of curves over a perfect field.
ArXiv e-prints, July 2015.

Atsushi Nakayashiki.
On the thomae formula for z n curves.
Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 33(6):987–1015, 1997.

J Thomae.
Beitrag zur bestimmung von...(0, 0,... 0) durch die klassenmoduln algebraischer functionen.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, 71:201–222, 1869.

Shaul Zemel.
Thomae formulae for general fully ramified $z\_\{n\}$ curves.
arXiv preprint arXiv:1311.4717, 2013.