Approximations de Tchebychev certifiées de fonctions D-finies vectorielles

F. Bréhard

Lundi 22 janvier 2018

Les fonctions D-finies, ou holonomes, sont les solutions d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients polynomiaux. Cette classe de fonctions mathématiques, en dépit de leur apparente simplicité, apparaissent par exemple naturellement dans de nombreux problèmes de physique mathématique et représentent 60% des fonctions répertoriées dans le *Handbook of mathematical functions* [?]. Leurs propriétés algébriques riches permettent un traitement purement algébrique de ces objets, au travers notamment de l'équation différentielle satisfaite [?]. Par ailleurs, la suite de leurs coefficients pour divers développements en séries (Taylor, Tchebychev, Legendre, Hermite...) [?, ?] vérifie une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux.

Néanmoins, il est parfois souhaitable, voire nécessaire, de disposer d'approximations numériques concrètes de ces fonctions, avec une borne certifiée sur l'erreur commise. Cela peut être le cas pour des applications industrielles critiques, comme le contrôle d'un satellite, où avoir une approximation polynomiale certifiée de sa trajectoire permet de la calculer très efficacement, tout en conservant une garantie forte sur la qualité du résultat ainsi obtenu. Cela se révèle également crucial dans le domaine des mathématiques assistées par ordinateur, où une partie des preuves (calcul d'intégrales, vérification d'inégalités, etc.) doit pouvoir être déléguée à l'ordinateur sans compromettre la rigueur mathématique de l'édifice total (voir par exemple [?]).

La validation de fonctions D-finies dans la base de Tchebychev a déjà été l'objet de plusieurs travaux. Dans [?], l'itération de Picard permet de reformuler le problème comme une équation de point fixe avec opérateur intégral contractant, de sorte à déduire un encadrement certifié de l'erreur d'approximation par le théorème du point fixe de Banach. Dans [?], l'utilisation d'une méthode de Newton permet d'obtenir différemment une équation de point fixe pour appliquer le même théorème de Banach. L'objectif de cette présentation est d'étendre cette seconde méthode au cas des équations D-finies vectorielles, en soulignant les difficultés supplémentaires qui apparaissent lors du processus d'obtention d'encadrements fins des erreurs composante par composante. La contribution finale consiste en un algorithme de validation s'insérant dans une chaîne complètement automatisée, partant de l'équation différentielle et produisant des approximations numériques de Tchebychev, dont une borne d'erreur certifiée est calculée *a posteriori* par cette méthode.

Dans un premier temps, nous présenterons une extension du théorème de point fixe de Banach afin d'obtenir une méthode générique de validation *a posteriori* pour des problèmes vectoriels, donnant des encadrements fins composante par composante de l'erreur d'approximation. Puis, nous appliquerons ce procédé aux équations D-finies vectorielles à l'aide d'une méthode de Newton sur un espace de coefficients bien choisi. Cela nous permettra d'obtenir des approximations polynomiales certifiées en base de Tchebychev pour des fonctions D-finies vectorielles, avec des bornes d'erreur certifiées composante par composante. Pour terminer, un exemple de circuit électrique nous permettra d'illustrer pas à pas le fonctionnement de l'algorithme de validation.