Solutions rationnelles d'équations de Mahler linéaires

Philippe Dumas, Inria Saclay

5 janvier 2017

De même que les équations différentielles utilisent comme opérateur de base une dérivation, de même les équations de Mahler emploient l'opérateur de substitution $f(x) \mapsto f(x^b)$. Elles ont été introduites par Kurt Mahler à la fin des années 1920 pour prouver des résultats de transcendance. Si la base de numération b est un nombre premier p qui est aussi la caractéristique du corps de base, elles se révèlent être des équations algébriques et sont liées à des automates qui se nourrissent de l'écriture en base p des entiers. Ces équations sont aussi liées à l'étude de la complexité des algorithmes de type diviser pour régner ou encore à certains problèmes de combinatoire des mots ou des partitions d'entiers.

La méthode de Mahler pour la transcendance est restée très vivante et a conduit récemment au besoin de résoudre des équations de Mahler. Nous nous concentrons dans cette présentation sur la recherche des solutions rationnelles à coefficients dans un corps de nombres, même si nous avons aussi étudié la recherche des solutions séries formelles, polynômes ou séries de Puiseux. Une des difficultés dans l'étude de ces équations est l'explosion en degré qui apparaît dès que l'on applique l'opérateur de Mahler à des polynômes. Les méthodes classiques pour les équations aux différences ne s'appliquent pas directement parce qu'il s'avère nécessaire de remplacer la structure linéaire des entiers par une structure arborescente. Nous montrons qu'il est possible de bâtir un algorithme de résolution rationnelle dont la complexité est polynomiale par rapport à la taille du résultat.

Ce travail est un travail commun avec Frédéric Chyzak (Inria Saclay), Thomas Dreyfus (Université Lyon 1) et Marc Mezzarobba (CNRS, Lip6).