Formules de Thomae généralisées aux courbes résolubles sur $\mathbb{P}^1$

A. Fiorentino, A. Le Meur et D. Lubicz

16 Janvier 2017

À une courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$, on peut lui associer sa jacobienne J. C'est une variété algébrique mais possédant également une structure de groupe. On dit que c'est une variété abélienne. Une bonne manière de décrire ces variétés abéliennes est d'utiliser des fonctions θ comme coordonnées projectives. Les coordonnées du point neutre de A sont appelés θ *constantes*. D'un point de vue modulaire, ces θ constantes caractérisent la variété abélienne A. Des relations algébriques existent entre ces θ constantes et fournissent des équations de A. On connaît une caractérisation des jacobiennes de courbes hyperelliptiques au moyen des équations de Frobenius. Plus généralement, ces relations peuvent être utilisées en vue de résoudre le problème de Schottky, c'est-à-dire de caractériser les variétés jacobiennes parmi les variétés abéliennes. Pour les courbes hyperelliptiques, on connaît des formules permettant de relier les points de ramification de la courbe aux θ constantes. Il s'agit des *formules de Thomae*. Ces formules ont connu un regain d'intérêt, particulièrement dans la communauté des physiciens, vers la fin des années 80. Ainsi, Bershadsky et Radul [1] ont généralisé ce type de formules pour les courbes cycliques sur $\mathbb{P}^1$ ayant un modèle affine non singulier. En 1997, Nakayashiki [2] propose une réécriture plus mathématique de leurs travaux. Plus récemment, Farkas et Zemel ont proposé [3] une méthode plus géométrique pour calculer des formules de Thomae pour ces courbes cycliques. En 2013, Zemel écrit dans un article non publié [4] une généralisation de ces méthodes pour traiter le cas des courbes cycliques totalement ramifiées sur $\mathbb{P}^1$. Notre travail généralise cette construction au cas des courbes résolubles sur $\mathbb{P}^1$. Pour cela, nous écrivons notamment une version « galoisienne »d'un théorème de Riemann permettant de relier les zéros d'un translaté de θ avec le point par lequel on a translaté.

Références

[1] Bershadsky, M. and Radul, A., Fermionic fields on $\mathbb{Z}_N$-curves, Communications in mathematical physics, vol.116, n 4, p.689-700, Springer, 1988

[2] Nakayashiki, A., On the Thomae formula for $\mathbb{Z}_N$ curves, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, vol.33, n 6, p.987-1015, 1997

[3] Farkas, H.M. and Zemel, S., Generalizations of Thomae's Formula for $\mathbb{Z}_n$ Curves, Developments in Mathematics, Springer New York, 2010

[4] Zemel, S., Thomae Formulae for General Fully Ramified $\mathbb{Z}_n$ Curves, arXiv preprint arXiv :1311.4717, 2013