Singularités des diffiétés algébriques

François Ollivier (CNRS)
LIX UMR 7161, École polytechnique

L'origine de ce travail est l'étude des singularités des systèmes différentiels plat, entreprise avec Jeremy Kaminski et Jean Lévine [2]. Par exemple, un modèle simple de voiture est plat : $y' - \mathrm{tg}\theta x' = 0 \quad (1)$. On peut paramétrer les trajectoires par les coordonnées d'un point de l'essieu arrière, (x, y), ce qui donne : $\theta = \mathrm{arctg}(y'/x')$, pourvu que $x' \neq 0$. On peut montrer qu'un paramétrage plat existe en tout point où $(x', y', \theta') \neq (0, 0, 0)$. Ces points sont des *singularités au sens des systèmes plats.* Ce sont néanmoins des points lisses de la *diffiété*, c'est-à-dire de l'objet géométrique défini par le système (1).

En effet, les diffiétés définies dans les ouvrages de Vinogradov [5] ou Zharinov [6] sont des variétés lisses, munies d'un champs de vecteur. Mais si on prend des diffiétés définies, par exemple, comme sous-espace de l'espace des jets par des équations différentielles algébriques, des points singuliers peuvent apparaître. La littérature sur le sujet est réduite. On trouve un article de Johnson [1], dans le formalisme de l'algèbre différentielle de Ritt [4].

Johnson propose d'abord une définition intuitive informelle utilisant les ensembles caractéristiques, avant de proposer une notion abstraite. On tente de revenir aux ensembles caractéristiques pour parvenir à une caractérisation effective des points singuliers. On reprend essentiellement la définition informelle de Johnson.

Définition. — Un point ξ d'une diffiété définie par un idéal différentiel premier $\mathcal{P}$, associé à un idéal (non différentiel) maximal $\mathfrak{m}$ est *régulier* s'il existe des fonctions coordonnées y_j, définies en ξ et telles que $\mathcal{P}$ admette, dans ces coordonnées, pour un ordre admissible convenable, un ensemble caractéristique $\mathcal{A}$ tel que $\forall A \in \mathcal{A}\ S_A(\xi) \neq 0$. (Rappelons que S_A est la dérivée partielle de A par rapport à sa dérivée dominante.)

C'est-à-dire que les dérivées dominantes peuvent localement s'exprimer comme fonction des dérivées inférieures. On montre que l'on retrouve une proposition prouvée par Johnson dans son formalisme.

Proposition. — Si ξ, défini par $\mathfrak{m}$, est régulier, alors $\bigcup_{r\in\mathrm{N}} \mathfrak{m}^r = (0)$.

Un exemple, emprunté à Johnson [1, p. 216], permet d'exhiber un point singulier.

Exemple. — On considère la diffiété algébrique V définie par l'idéal différentiel dont un ensemble caractéristique est $yy'' - y'$. Le terme de degré minimal est y', qui n'est pas d'ordre nul, donc $[y]$ n'est pas une composante isolée. On montre que pour tout $r \in \mathrm{N}\ y' \in [y]^r$. En effet la propriété est vraie pour $r = 0, 1$. Si elle est vraie pour r, alors $y'' \in [y]^r$ et $y' = yy'' \in [y]^{r+1}$. Ceci montre que le point correspondant à l'idéal $\mathfrak{m} := [t, y]$ est singulier puisque $\bigcup_{r\in\mathrm{N}} \mathfrak{m}^r \neq (0)$.

Désingulariser une variété algébrique consiste à rechercher une variété lisse dont elle soit la projection (ou l'image par un morphisme fini), à laquelle elle soit birationnellement équivalente. On voit que V ne peut être la projection d'une variété lisse W, car alors l'intersection des puissances $\mathfrak{m}^r$ serait la projection des puissance d'un idéal maximal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}(W)$, donc (0). Les tentatives de désingularisation par des moyens classiques semblent donc compromises.

On donnera un aperçu d'une caractérisation de ces singularités au moyens des différentielles de Kähler.

Références

[1] JOHNSON (Joseph), « A notion of regularity for differential local algebras », in *Contributions to algebra*, 211–232, Academic Press, New York, 1977.

[2] KAMINSKI (Yirmeyahu J.), LÉVINE (Jean) et OLLIVIER (François), *Intrinsic and Apparent Singularities in Differentially Flat Systems, and Application to Global Motion Planning*, 2017.

[3] KOLCHIN (Ellis Robert), *Differential algebra and algebraic groups*, Academic Press, New York, 1973.

[4] RITT, (Joseph Fels), 1950. *Differential Algebra*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 33, A.M.S., New-York.

[5] KRASIL'SHCHIK (Iosif S.), LYCHAGIN (Valentin V.) et VINOGRADOV (Alexandre M.), *Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*, Gordon and Breach, New York, 1986.

[6] ZHARINOV (Viktor Viktorovich), *Geometrical aspects of partial differential equations*, Series on Soviet and East European Mathematics, vol. 9, World Scientific, Singapore, 1992.