Intersections réelles entre une courbe de petit degré et une hypersurface creuse

Mohab Safey El Din   Sébastien Tavenas

La règle des signes de Descartes assure qu'un polynôme réel univarié avec seulement t monôme a au plus (t-1) racines réelles positives. Il a été montré dans une série de travaux (Khovanskiĭ [4], Bihan-Sottile [3]) que le nombre de solutions réelles d'un système peut être majoré par une borne qui ne dépend pas du degré des polynômes, mais seulement du nombre de monômes qui apparaissent dans le système.

Cependant toutes ces bornes sont exponentielles en ce nombre de monômes, et on ne sait pas aujourd'hui si cette croissance exponentielle est nécessaire ou s'il pourrait être possible de trouver des bornes (par exemple polynomiales) en le nombre de monômes.

Dans l'autre direction, de nombreux petits systèmes particuliers ont été étudiés. Une succession de résultats (Li-Rojas-Wang [6], Avedaño [1], Bihan-El Hilany [2]) borne le nombre de solutions réelles pour des systèmes en deux dimensions : intersection d'une courbe creuse planaire avec une ligne ou courbe définie par un trinôme. Ainsi pour le cas planaire, Koiran, Portier et Tavenas [5], ont prouvé une une borne (polynomiale en d et t) qui majeure le nombre d'intersections entre une courbe planaire creuse (définie par un polynôme à t monômes) et une courbe de degré d. Nous voulons généraliser ce résultat à des systèmes à n dimensions. Nous proposons de montrer comment borner (par une borne polynomiale en d et t) le nombre d'intersections réelles entre une courbe de degré d et une hypersurface définie par un polynôme avec au plus t monômes.

Références

[1] Martin Avedaño. *The number of real roots of a bivariate polynomial on a line.* arXiv preprint math/0702891, 2007.

[2] Frédéric Bihan et Boulos El Hilany *A sharp bound on the number of real intersection points of a sparse plane curve with a line.* arXiv preprint arXiv :1506.03309, 2015.

[3] Frédéric Bihan et Frank Sottile. *New fewnomial upper bounds from Gale dual polynomial systems.* Moscow mathematical journal 7(3), 387–407, 2007.

[4] AG. Khovanskiĭ, *Fewnomials.* American Mathematical Society, vol. 88, 1991.

[5] Pascal Koiran, Natacha Portier et Sébastien Tavenas. *On the intersection of a sparse curve and a low-degree curve : A polynomial version of the lost theorem.* Discrete & Computational Geometry 53(1), 48–63, 2015.

[6] Tien-Yien Li, J. Maurice Rojas et Xiaoshen Wang. *Counting real connected components of trinomial curve intersections and m-nomial hypersurfaces.* Discrete & Computational Geometry 30(3), 379–414, 2003.